بسمه تعالی

موضوع : مبانی آمار و احتمال برای ورود به علم داده و تحلیل داده

بخش سیزدهم: تابع احتمال گسسته و پیوسته و امید ریاضی

- توابع احتمال گسسته و پیوسته
- تابع توزیع تجمعی
- آماره های متغیر تصادفی:
  - امید ریاضی
  - مفهوم میانگین بلندمدت
  - واریانس

در این پارت از اموزش به بررسی **تابع احتمال گسسته و پیوسته و امید ریاضی** می پردازیم .

در اموزش های قبلی راجب **احتمالات و احتمالات شرطی** صحبت کردیم حال می خواهیم بررسی کنیم اگر داده ها از یک رفتار خاص پیروی کنند محاسبه شاخص های اماری و میزان احتمال آنها به چه صورت خواهد بود. این میزان احتمال به کمک تابعی که به آن تابع احتمال می گویند محاسبه می شود.

برای درک بهتر این موضوع نیاز به یادآوری داریم :

فرض کنید می‌خواهیم تعداد خرابی یک دستگاه، تعداد مشتریان واردشده به بانک یا زمان انتظار یک مشتری را بررسی کنیم. همه جامعه آماری را نمی توانیم بررسی کنیم پس یک متغیر تصادفی که نماینده پیشامد مورد نظر است را انتخاب کرده و با ازمایش تصادفی نتایج را بررسی می کنیم.
حال اگر متغیر تصادفی ما مقادیر گسسته به خودش بگیر برای محاسبه تابع احتمال آن خواهیم داشت:

در ابتدای امر باید بدانیم که توابع که متغیر تصادفی گسسته دارند دارای خاصیت یا ویژگی های زیرند:

- احتمال انتخاب هریک از اعضای نمونه
- احتمال رخ داد هر یک از اعضای نمونه
- تابعی که احتمال هریک از مقادیر متغیر تصادفی را نشان می دهد:

$$P_X(x) = P(X = x) \longrightarrow \begin{cases} P_X(x) \geq 0 \\ \sum_{\forall x} P_X(x) = 1 \end{cases}$$

و اگر مقدار احتمال را به صورت تجمعی محاسبه کنیم خواهیم داشت :

$$F_X(x) = P(X \leq x) \longrightarrow \text{مجموع احتمالات مقادیر تصادفی}$$

مثال : پرتاب تاس > احتمال امدن اعداد ۲ و ۴ و ۶ برابر است با ۱/۶ و احتمال آمدن عدد زوج که حالت تجمعی است برابر ۲/۳

امید ریاضی :

امید ریاضی = میانگین بلندمدت یک پدیده تصادفی.

براساس محاسبه تابع احتمال می توان میانگین وزنی یا امید ریاضی را نیز محاسبه کرد:

$$E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n$$

هم چنین از روی امید ریاضی می توان واریانس را نیز بدست آورد:



$$\bar{x} = \frac{۲+۴+۷}{۳} = \frac{۱۳}{۳} = ۴\frac{۱}{۳}$$

$\bar{x}$ میانگین حسابی (میانگین ساده) است

یعنی اگر یک اتفاق تصادفی (مثل خرابی، پرتاب سکه، یا عمر یک قطعه) را بی‌نهایت بار تکرار کنیم،میانگین نتیجه‌ها به یک عدد ثابت می‌رسد ← این عدد همان امید ریاضی است.

هم چنین در این حالت واریانس برابر خواهد بود با :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$var(x) = E[(x - E(x))^2] = \sum_{\forall x}(x - \mu)^2 P_x(x)$$

مثال : اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده نتیجه پرتاب یک تاس باشد، امید ریاضی و واریانس X را بدست آورید.

حال اگر متغیر تصادفی ما مقادیر پیوسته به خودش بگیر برای محاسبه تابع احتمال آن خواهیم داشت:

حال اکر متغیر تصادفی ما پیوسته باشد . تابع احتمال یا چگالی به صورت زیر دارد:

$f_X(x)$ ⟵ تابع چگالی احتمال دارای ۲ خاصیت است ⟵
$$\begin{cases} f_X(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

نکته : اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد، احتمال اینکه مقداری در بازه ی $[a,b]$ اختیار کند برابر است با :

$$P(a \leq X \leq b) = f(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

و هم چنین تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\textbf{تابع توزیع تجمعی}\quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

مثال : برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمالی زیر تعریف شده، دو خاصیت تابع چگالی را بررسی کنید:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & ; elsewhere \end{cases}$$

اگر بخواهیم میانگین براساس مقدار تابع احتمال برای متغیر پیوسته محاسبه کنیم :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f_X(x)\,dx$$

و براساس آن واریانس برابر :

$$var(x) = E[(x - E(x))^2]$$

مثال: اگر $1 \leq x \leq 3$ $f_X(x) = bx$باشد، امید ریاضی X را بدست آورید؟